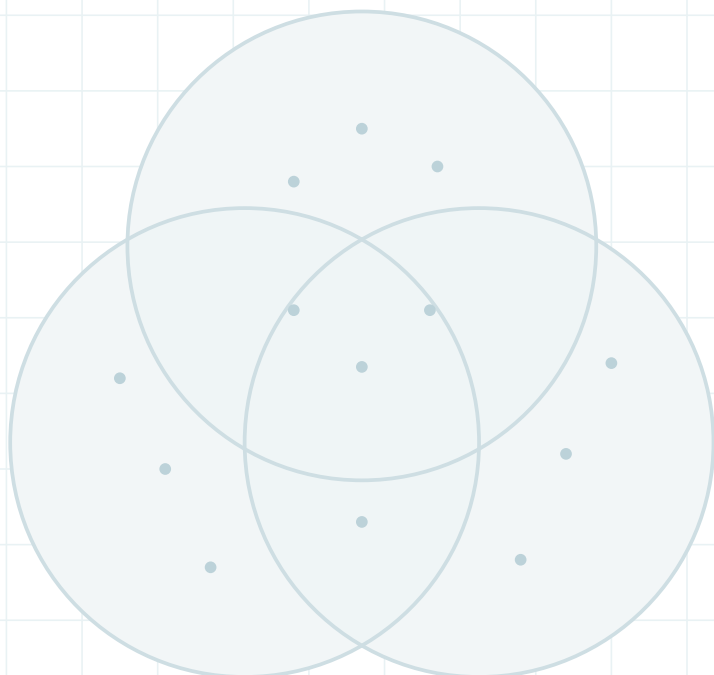
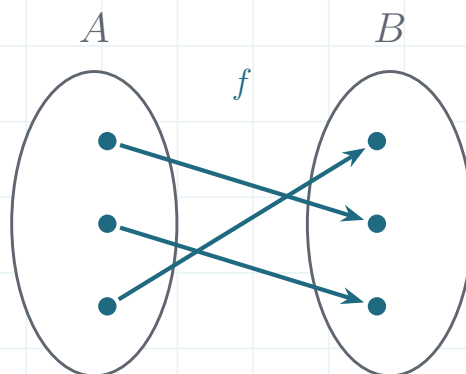


集合論

Set Theory



$$\aleph_0 < \mathfrak{c} < |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$$

オリエンテーション

このオリエンテーションで話すこと

- 集合論って、そもそも何をする学問なのか。高校で習った「集合」と何が違うのか。
- 全 4 章が、どんな順番でつながっているのか。
- このプリントの読み方と、つまずかずに進むコツ。

■ はじめに

ようこそ、集合論の世界へ！

高校の数学 A でも「集合」は出てきたよね。 $A \cap B$ や $A \cup B$ を求めたり、ベン図を描いたり。だから「集合論なんて簡単でしょ？」と思うかもしれない。実際、第 1 章の前半は高校の復習から始まるよ。

でも、大学の数学で集合論を学ぶのには、2 つの大きな理由があるんだ。

- **大学数学の「共通語」を身につけるため。** 線形代数の「核 $\text{Ker } f$ 」も、微分積分の「定義域」も、確率の「事象」も、ぜんぶ集合と写像の言葉で書かれている。ほかのどの分野を学ぶときにも、この言葉が読めることが前提になるんだ。
- **「無限」をきちんと扱うため。** 自然数と実数は、どちらも無限個ある。では、どちらが「多い」んだろう？ この素朴な問いに答えると、**無限にも大きさの違いがある**という、びっくりするような事実が見えてくる。

このオリエンテーションでは、全体の地図を先に見ておこう。

■ 集合論ってどんな学問？

ひとことで言うと、集合論は「ものの集まり」と「その間の対応」を扱う数学なんだ。そして、それを突きつめると「無限とは何か」という問いにたどりつく。

■ **集合と論理：数学を書くための言葉** 「 $A \subset B$ を示せ」と言われたら、どう書き始めればいだろう？ 答えは「 $x \in A$ とする」から始めて「 $x \in B$ 」にたどりつく、なんだ（第 1 章 No.1）。こうした「証明の書き方の型」と、それを支える「かつ」「または」「ならば」「すべての」「ある」の使い方を、第 1 章で整理するよ。

■ **写像：集合と集合をつなぐ** 高校の関数 $y = f(x)$ を、数とは限らない集合どうしの対応に広げたものが写像だよ（第 2 章）。「もれなく対応している」（全射）、「重ならずに対応している」（単射）といった性質が、線形代数でも微分積分でも、ずっと活躍するんだ。

■ **濃度：無限を数える** いすとお客さんの数を比べたいとき、数えなくても、全員座らせてみて余らなければ同じ数だと分かるよね。この「1 対 1 に対応をつける」という考え方を無限集合に使うと、

- 自然数と偶数は「同じ数」だけある（全体と部分が同じ大きさ！）
- 自然数と有理数も「同じ数」だけある
- でも、実数は自然数より**真に多い**

ということが分かる（第 3 章）。カントールが 19 世紀に見つけた、数学の歴史を変えた発見なんだ。

■**順序と選択公理：無限の土台** 最後の第4章では、「大小」や「包含」をまとめた**順序**を学び、無限集合の中で「これ以上大きくできないもの」を見つける道具（ツォルンの補題）を手に入れる。そして、その道具を支える**選択公理**という、ちょっと不思議な公理と向き合うよ。

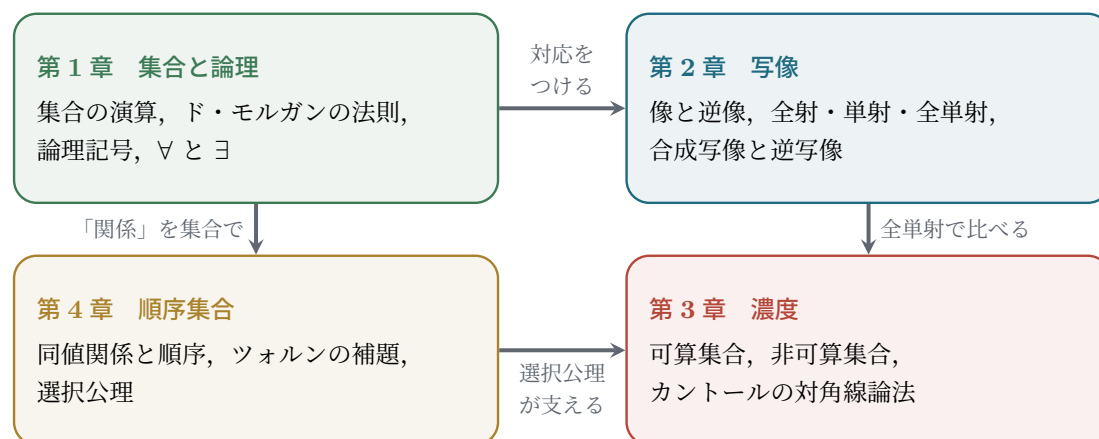
コラム：どこで使われているの？

- **すべての分野**：大学数学の定義や定理は、ほぼすべて集合・写像・論理記号で書かれている。
- **線形代数・代数学**：「核と像」は逆像と像，「商群」や「合同式」は同値関係と商集合（第4章 No.1）から作られる。
- **確率・統計**：事象は集合で，「 A または B 」は $A \cup B$ ，「 A でない」は補集合 A^c 。
- **コンピュータ・情報**：データベースの検索は集合演算そのもの。対角線論法は「どんなプログラムでも解けない問題がある」ことの証明にも使われているよ（第3章 No.3）。

■ 全体の地図

このプリント集は全4章、11回でできているよ。前半の第1章・第2章で「言葉」を整え、後半の第3章・第4章でその言葉を使って「無限」に挑む、という流れなんだ。

言葉を整える



無限に挑む

各章の中身はこんな感じ。

章	タイトル	主な内容
第1章	集合と論理	集合の定義と演算，論理記号
第2章	写像	写像の定義，全射・単射・全単射，合成写像と逆写像
第3章	濃度	可算集合，非可算集合，カントールの対角線論法
第4章	順序集合	順序関係（同値関係も含む），ツォルンの補題，選択公理

第3章と第4章は、じつは深くつながっている。第3章で「無限個の集合から1つずつ選ぶ」場面が出てくるけど、それを保証しているのが第4章の選択公理なんだ。選択公理を使っているところには、その場で注意の箱を置いてあるから、第4章 No.3 で「あそこで使っていたのか」と振り返ってみてね。

ほかの分野とのつながり

- このシリーズでは、集合を「はっきり決まったものの集まり」という素朴な定義で扱う。集合を公理から組み立て直す公理的集合論 (ZFC) や、「証明できる」とはどういうことかは、分野「数理論理学」で扱うよ。
- 第3章では、実数の「隙間のなさ」(区間縮小法)を使う。その厳密な扱いは分野「解析学」第1章が担当だよ。
- 集合と写像の言葉は、分野「位相空間論」でそのまま主役になる。「連続写像」は「開集合の逆像が開集合」と、第2章 No.1 の逆像を使って定義されるんだ。

■ プリントの読み方

どの回も、同じ形でできているよ。

- 最初の「この回のゴール」で、その回にできるようになることを確認しよう。
- 本文には、色のついた箱がいろいろ出てくる。色で役割が分かるようになっているんだ。

定義 (ティール)

新しい言葉の意味をきっちり決めるところ。集合論は特に定義が多い分野で、ほとんどの証明は「定義をそのまま使う」ことで書けるんだ。なお、選択公理や整列可能定理のように「定義」ではない主張は、番号なしの見出しつきの箱にしてあるよ。

定理 (赤)

定義から証明できる、大切な性質。すぐあとに【証明】がついているよ。定理の**仮定**(「全射ならば」「有限集合ならば」など)は**太字**にしてある。たとえば「単射なら全射」は有限集合では正しいけど、無限集合では成り立たない。仮定は必ず確認しよう。

例・例題 (緑)

定義や定理が「たとえばこういうこと」と分かる具体例。例題には【解答】がついている。

注意 (灰)

間違えやすいところや、証明のコツ。「ここで選択公理を使っている」という注意もこの箱だよ。

コラム (金)

ちょっと寄り道。他の分野とのつながりや、数学史のエピソードを紹介しているよ。読み飛ばしても大丈夫。

- 最後に**練習問題**と**解答**がある。「(考えてみよう)」がついた問題は、少し発展的なチャレンジ問題だよ。
- さらに **発展** のマークがついた問題は、その回の内容から一歩踏み出した**発展問題**。最初は飛ばして、ほかの問題が解けてから挑戦しよう。
- 本文には「第2章 No.3 定理5」のように、前の回への参照がたくさん出てくる。忘れていたら、ぜひ戻って読み直してみてね。ほかの分野につながるところは「分野「線形代数」第4章 No.3」のよ

うに、分野名つきで書いてあるよ。

- 証明を省略したところは「証明は省略する」「教科書に任せる」とはっきり書いてある。

■ どう学ぶか：5つのコツ

■1. **定義に戻る** 集合論の証明で手が止まったら、**定義を書き出してみる**のがいちばんの近道なんだ。「 $A \subset B$ を示す」なら「 $x \in A$ とする」, 「単射を示す」なら「 $f(a) = f(a')$ とする」。書き出しが決まれば、あとは定義をつないでいだけ、ということがとても多いよ。

■2. **小さな例で試す** 新しい定理や定義が出てきたら、 $\{1, 2, 3\}$ のような**小さな有限集合**で確かめてみよう。冪集合、写像、同値類、ハッセ図…。具体例を1つ書くだけで、抽象的な文がぐっと身近になるんだ。

■3. **図を描く（でも図に頼りすぎない）** ベン図、写像の矢印図、ハッセ図、対角線の表。集合論にも役に立つ図がたくさんある。ただし、**図は証明の代わりにはならない**。図で答えを予想したら、証明は「要素を追いかけて」文章で書こう（第1章 No.1）。

■4. **否定を正しく作る** 「すべての x で～」の否定は「ある x で～でない」。∀ と ∃ の入れかえ（第1章 No.2）は、背理法や反例を作るたびに使う大切な技術なんだ。否定を作ったら、日本語に直して意味が通るか確かめよう。

■5. **無限の直感を疑う** 「全体は部分より大きい」「どの無限も同じ無限」…。有限の世界で正しかった直感は、無限集合ではしばしば成り立たない。「本当かな？」と立ち止まって、**定義に従って確かめる習慣**をつけよう。それが集合論のいちばんおもしろいところでもあるよ。

ミスを防ぐ確認のワザ

- 集合の等式は、有限集合で具体的に計算して、両辺が一致するか確かめる。
- 写像を考えるときは、**定義域と終域**を必ず書く。同じ式でも、全射かどうかが変わるよ。
- 全単射を示したら、逆写像を実際につけて、合成が恒等写像になるか確かめる。
- 「～とは限らない」と言いたいときは、反例を1つ具体的にあげる。
- 否定をとったら、もう一度否定をとって元にもどるか確かめる。

■ よく出てくる記号

最初は見慣れない記号も、使っているうちに自然に読めるようになるよ。困ったらここに帰ってきてね。

記号	意味	初登場
$x \in A, x \notin A$	x は A の要素である／でない	第 1 章 No.1
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	数の集合 ($\mathbb{N}$ は 0 を含めない)	第 1 章 No.1
$\emptyset, A $	空集合, 要素の個数 (濃度)	第 1 章 No.1
$A \subset B, A \subsetneq B$	部分集合 (等号を含む), 真部分集合	第 1 章 No.1
$A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A^c$	和集合, 共通部分, 差集合, 補集合	第 1 章 No.1
$\mathcal{P}(A), A \times B$	冪集合 (本によっては 2^A), 直積	第 1 章 No.1
$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$	でない, かつ, または, ならば, 同値	第 1 章 No.2
$\forall, \exists$	すべての, ある (存在する)	第 1 章 No.2
$f: A \rightarrow B, a \mapsto f(a)$	写像, 要素の対応	第 2 章 No.1
$f(C), f^{-1}(D)$	像, 逆像	第 2 章 No.1
$\text{id}_A, g \circ f, f^{-1}$	恒等写像, 合成写像, 逆写像	第 2 章 No.1, No.3
$A \sim B, \aleph_0$	対等 (濃度が等しい), 可算濃度	第 3 章 No.1
$\mathfrak{c}$	連続体濃度 ($\mathbb{R}$ の濃度)	第 3 章 No.2
$[a], A/\sim$	同値類, 商集合	第 4 章 No.1
$\max S, \sup S$	最大元, 上限	第 4 章 No.1
$\prod_{\lambda} A_{\lambda}$	集合族の直積	第 4 章 No.3

■ さいごに

集合論は、大学数学の「文法」を学ぶ分野であり、同時に「無限」という、人類が何千年も考え続けてきた謎に正面から挑む分野でもあるんだ。最初は「当たり前のことをわざわざ証明している」ように感じるかもしれない。でも、その「当たり前」を 1 つずつ確かめていくと、自然数と実数の間に越えられない壁があることや、選択公理のような不思議な主張にたどりつく。当たり前を疑うことが、新しい景色への入り口なんだ。

一気に全部分かろうとしなくて大丈夫。1 回分ずつ、自分のペースで進めていこう。分からないところがあるのは、ちゃんと考えている証拠だよ。

それじゃあ、第 1 章 No.1「集合の定義と演算」から、いっしょに始めよう！